ETUDE DU MOUVEMENT VERTICAL D'UNE VOITURE

QUADRAT QUENTIN

1. Présentation du modéle

On veut étudier le mouvement vertical d'une voiture dont le mouvement horizontal est donné par le triplet $(x(t), y(t), \phi(t))$, où $\phi(t)$ est la direction du véhicule. Celui-ci est modélisé en 3D, par une carcasse représentée par une plaque (de longueur $2L$, de largeur $2l$, de masse ponctuelle M et de moment d'inertie I_θ et I_α) à laquelle sont accrochées quatre roues (de rayon r et de masse m) par des ressorts (de rigidité k).

On note I_α le moment d'inertie par rapport à l'axe longitudinal de la voiture (roulis), I_θ le moment d'inertie par rapport à l'axe transversal de la voiture (tangage), g la gravité, $u(x, y)$ l'altitude du sol, $z(t)$ l'altitude du centre de gravité de la carcasse, $z_1(t) \ldots z_4(t)$ les allongements des quatre ressorts de la suspension de la voiture, θ l'angle de tangage et α l'angle de roulis.

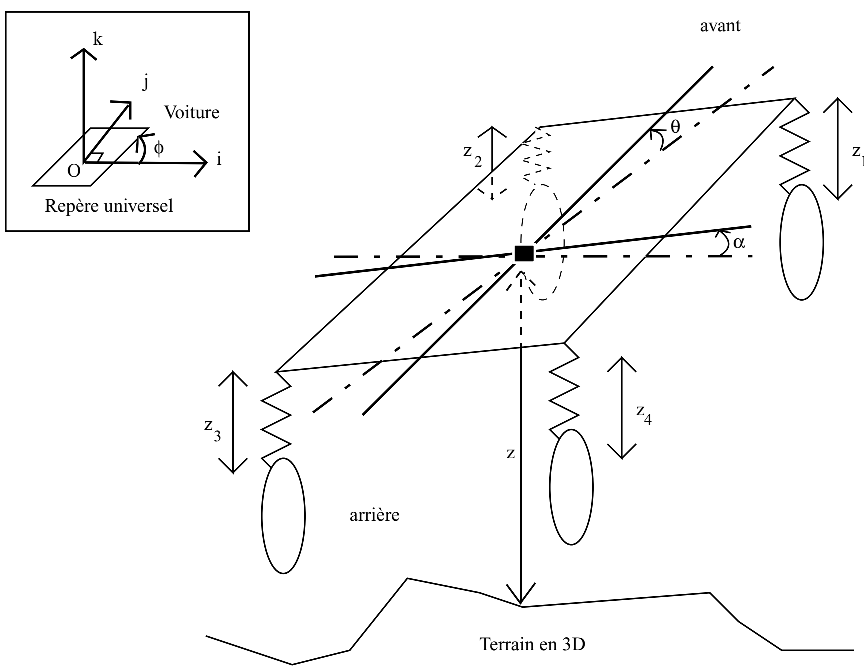

Figure 1. Voiture

Page web : www.epita.fr/∼quadra_q.
Email : quadra_q@epita.fr.

2. Calcul des énergies cinétiques

De la première roue : $1/2m(\dot{z}+L\dot{\theta}+\dot{z}_1+l\dot{\alpha})^2$.
De la deuxième roue : $1/2m(\dot{z}+L\dot{\theta}+\dot{z}_2-l\dot{\alpha})^2$.
De la troisième roue : $1/2m(\dot{z}-L\dot{\theta}+\dot{z}_3-l\dot{\alpha})^2$.
De la quatrième roue : $1/2m(\dot{z}-L\dot{\theta}+\dot{z}_4+l\dot{\alpha})^2$.
De la caracasse : $1/2(M\dot{z}^2+I_\theta\dot{\theta}^2+I_\alpha\dot{\alpha}^2)$.

3. Calcul des énergies potentielles

Des quatre roues : $mg(4z+z_1+z_2+z_3+z_4)$.
Des quatre ressorts : $1/2k(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2)$.
De la caracasse : Mgz .
Soit :

$$R_1 = (u(x+L\cos\phi+l\sin\phi, y+L\sin\phi-l\cos\phi)-(z+z_1+L\theta+l\alpha-r))^+ ;$$
$$R_2 = (u(x+L\cos\phi-l\sin\phi, y+L\sin\phi+l\cos\phi)-(z+z_2+L\theta-l\alpha-r))^+ ;$$
$$R_3 = (u(x-L\cos\phi-l\sin\phi, y-L\sin\phi+l\cos\phi)-(z+z_3-L\theta-l\alpha-r))^+ ;$$
$$R_4 = (u(x-L\cos\phi+l\sin\phi, y-L\sin\phi-l\cos\phi)-(z+z_4-L\theta+l\alpha-r))^+ .$$

L'énérgie de la réaction du sol sur la premième roue est alors de $1/2R_1^2$, celle de la deuxième roue : $1/2R_2^2$, celle de la troisième : $1/2R_3^2$ et enfin la quatrième : $1/2R_4^2$.

4. Principe de la moindre action

On trouve :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A} = \int & M\dot{z}\delta\dot{z}+I_\theta\dot{\theta}\delta\dot{\theta}+I_\alpha\dot{\alpha}\delta\dot{\alpha}-2Mg\delta z \\
& -2mg(4\delta z+\delta z_1+\delta z_2+\delta z_3+\delta z_4) \\
& -k(z_1\delta z_1+z_2\delta z_2+z_3\delta z_3+z_4\delta z_4) \\
& +m(\dot{z}+\dot{z}_1+L\dot{\theta}+l\dot{\alpha})(\delta\dot{z}+\delta\dot{z}_1+L\delta\dot{\theta}+l\delta\dot{\alpha}) \\
& +m(\dot{z}+\dot{z}_2+L\dot{\theta}-l\dot{\alpha})(\delta\dot{z}+\delta\dot{z}_2+L\delta\dot{\theta}-l\delta\dot{\alpha}) \\
& +m(\dot{z}+\dot{z}_3-L\dot{\theta}-l\dot{\alpha})(\delta\dot{z}+\delta\dot{z}_3-L\delta\dot{\theta}-l\delta\dot{\alpha}) \\
& +m(\dot{z}+\dot{z}_4-L\dot{\theta}+l\dot{\alpha})(\delta\dot{z}+\delta\dot{z}_4-L\delta\dot{\theta}+l\delta\dot{\alpha}) \\
& +R_1(\delta z+\delta z_1+L\delta\theta+l\delta\alpha-r) \\
& +R_2(\delta y+\delta y_2+L\delta\theta-l\delta\alpha-r) \\
& +R_3(\delta y+\delta y_3-L\delta\theta-l\delta\alpha-r) \\
& +R_4(\delta y+\delta y_4-L\delta\theta+l\delta\alpha-r)
\end{aligned}$$

La variation de l'action aprés intégration par partie vaut :

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{A} = \int & - M\ddot{z}\delta z - I_\theta\ddot{\theta}\delta\theta - I_\alpha\ddot{\alpha}\delta\alpha - 2Mg\delta z \\
& - 2mg(4\delta z + \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 + \delta z_4) \\
& - kz_1\delta z_1 - kz_2\delta z_2 - kz_3\delta z_3 - kz_4\delta z_4 \\
& - 4m\ddot{z}\delta z - m\ddot{z}(\delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 + \delta z_4) \\
& - m\ddot{z}_1\delta z_1 - m\ddot{z}_2\delta z_2 - m\ddot{z}_3\delta z_3 - m\ddot{z}_4\delta z_4 \\
& - (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 + \ddot{z}_3 + \ddot{z}_4)m\delta z \\
& - (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)mL\delta\theta \\
& - (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 - \ddot{z}_3 + \ddot{z}_4)ml\delta\alpha \\
& - (\delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 - \delta z_4)mL\ddot{\theta} \\
& - 4mL^2\ddot{\theta}\delta\theta - 4ml^2\ddot{\alpha}\delta\alpha \\
& - (\delta z_1 - \delta z_2 - \delta z_3 + \delta z_4)ml\ddot{\alpha} \\
& + R_1(\delta z + \delta z_1 + L\delta\theta + l\delta\alpha) \\
& + R_2(\delta z + \delta z_2 + L\delta\theta - l\delta\alpha) \\
& + R_3(\delta z + \delta z_3 - L\delta\theta - l\delta\alpha) \\
& + R_4(\delta z + \delta z_4 - L\delta\theta + l\delta\alpha)\ .
\end{aligned}
$$

On trouve un système d'équation différentielle :

$$\ddot{z} + \frac{m(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 + \ddot{z}_3 + \ddot{z}_4)}{M + 4m} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{M + 4m} - 2g\ . \tag{1}$$

$$kz_1 + m(\ddot{z}_1 + \ddot{z} + L\ddot{\theta} + l\ddot{\alpha}) = -2mg + R_1\ . \tag{2}$$

$$kz_2 + m(\ddot{z}_2 + \ddot{z} + L\ddot{\theta} - l\ddot{\alpha}) = -2mg + R_2\ . \tag{3}$$

$$kz_3 + m(\ddot{z}_3 + \ddot{z} - L\ddot{\theta} - l\ddot{\alpha}) = -2mg + R_3\ . \tag{4}$$

$$kz_4 + m(\ddot{z}_4 + \ddot{z} - L\ddot{\theta} + l\ddot{\alpha}) = -2mg + R_4\ . \tag{5}$$

$$m(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_3 - \ddot{z}_4 + 4L\ddot{\theta}) + \frac{I_\theta\ddot{\theta}}{L} = R_1 + R_2 - R_3 - R_4\ . \tag{6}$$

$$m(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 - \ddot{z}_3 + \ddot{z}_4 + 4l\ddot{\alpha}) + \frac{I_\alpha\ddot{\alpha}}{l} = R_1 - R_2 - R_3 + R_4\ . \tag{7}$$

En faisant (2) plus (3) moins (4) moins (5) moins (6), on obtient :

$$I_\theta\ddot{\theta} = Lk(z_1 + z_2 - z_3 - z_4)\ . \tag{8}$$

En faisant (2) plus (6) moins (3) moins (4) moins (7), on obtient :

$$I_\alpha\ddot{\alpha} = lk(z_1 - z_2 - z_3 + z_4)\ . \tag{9}$$

En faisant (1) moins (2) moins (3) moins (4) moins (5), on obtient :

$$M\ddot{z} = -2Mg + k(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)\ . \tag{10}$$

Soit :

$$F_1 = \frac{k(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)}{M}\ ,$$

$$F_2 = \frac{L^2k(z_1 + z_2 - z_3 - z_4)}{I_\theta}\ ,$$

$$F_3 = \frac{l^2 k(z_1 - z_2 - z_3 + z_4)}{I_\alpha}$$

En utilisant les équations (8), (9) et (10); (2) s'écrit :

$$\ddot{z}_1 = \frac{R_1 - kz_1}{m} - F_1 - F_2 - F_3 \; .$$

De même, on trouve :

$$\ddot{z}_2 = \frac{R_2 - kz_2}{m} - F_1 - F_2 + F_3 \; ,$$
$$\ddot{z}_3 = \frac{R_3 - kz_3}{m} - F_1 + F_2 + F_3 \; ,$$
$$\ddot{z}_4 = \frac{R_4 - kz_4}{m} - F_1 + F_2 - F_3 \; .$$

5. Discrétrisation des équations

Pour calculer les trajectoires des corps, nous pouvons approximer les équations différentielles par des équations récurrentes, où h désigne le pas de discrétisation en temps :

$$z_1(t+h) = 2z_1(t) - z_1(t-h) + h^2 \left(\frac{R_1 - kz_1(t)}{m} - F_1(t) - F_2(t) - F_3(t) \right) \; ,$$
$$z_2(t+h) = 2z_2(t) - z_2(t-h) + h^2 \left(\frac{R_2 - kz_2}{m} - F_1(t) - F_2(t) + F_3(t) \right) \; ,$$
$$z_3(t+h) = 2z_3(t) - z_3(t-h) + h^2 \left(\frac{R_3 - kz_3(t)}{m} - F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) \right) \; ,$$
$$z_4(t+h) = 2z_4(t) - z_4(t-h) + h^2 \left(\frac{R_4 - kz_4(t)}{m} - F_1(t) + F_2(t) - F_3(t) \right) \; ,$$
$$z(t+h) = 2z(t) - z(t-h) + h^2 \left(F_1(t) - 2g \right) \; ,$$
$$\alpha(t+h) = 2\alpha(t) - \alpha(t-h) + \frac{h^2 F_3(t)}{l} \; ,$$
$$\theta(t+h) = 2\theta(t) - \theta(t-h) + \frac{h^2 F_2(t)}{L} \; .$$