ETUDE DU MOUVEMENT VERTICAL D'UNE MOTO (TANGAGE)

QUADRAT QUENTIN

1. Présentation du modéle

Le véhicule est modélisé en 2D, par une carcasse représenté par une barre de demi longueur l et de masse ponctuelle M à laquelle sont accrochées deux roues (de rayon R et de masse m) par des ressorts. On note $u(t)$ la l'altitude du sol, $y(t)$ est l'altitude de la carcasse, $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les allongements des deux ressorts, θ le degré d'inclinaison du véhicule. On note g la gravité, θ le degré de penchement du véhicule (figure 1).

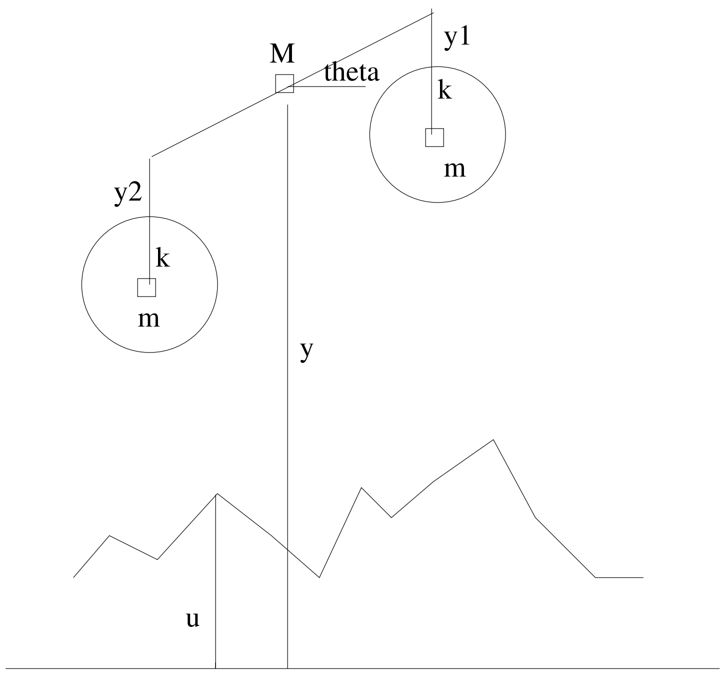

Fig. 1. Modélisation de la voiture

2. Calcul des équations du mouvement

Les forces qui sont en jeux sont : la pesanteur des masses (roue et carcasse), la répulsion du sol sur les roues et la force des ressorts.

Page web : www.epita.fr/~quadra_q.
Email : quadra_q@epita.fr.

L'énergie cinétique de la voiture est :

$$\frac{M\dot{y}^2}{2} .$$

L'énergie potentielle de la voiture est :

$$Mgy .$$

L'énergie cinétique verticale de la roue de devant est $(\dot{y}_2 + l\cos\theta\dot{\theta} + \dot{y})^2$, que l'on approxime en faisant l'hypothése θ petit par :

$$1/2m(\dot{y}_1 + \dot{y} + l\dot{\theta})^2 .$$

De même, l'énergie cinétique verticale de la roue de derrière est :

$$1/2m(\dot{y}_2 + \dot{y} - l\dot{\theta})^2 .$$

L'énergie potentielle due à la pesanteur des deux roues est :

$$mg(2y + y_2 + y_1) .$$

L'énergie potentielle du ressort de la roue avant est :

$$1/2ky_1^2 .$$

L'énergie potentielle du ressort de la roue arrière est :

$$1/2ky_2^2 .$$

L'énergie potentielle de réaction du sol sur la roue de devant est :

$$1/2([u(x+l) - (y_1 + y + l\theta - R)]^+)^2 ,$$

où A^+ désigne la partie positive de A.

L'énergie potentielle de réaction du sol sur la roue de derrière est :

$$1/2([u(x-l) - (y_2 + y - l\theta - R)]^+)^2 .$$

L'action à minimiser vaut donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = 1/2 \int \big\{ & M\dot{y}^2 + m(\dot{y}_1 + \dot{y} + l\dot{\theta})^2 + m(\dot{y}_2 + \dot{y} - l\dot{\theta})^2 \\ & - ky_1^2 - ky_2^2 - 2Mgy - 2mg(2y + y_2 + y_1) \\ & - ([u(x+l) - (y_1 + y + l\theta - R)]^+)^2 \\ & - ([u(x-l) - (y_2 + y - l\theta - R)]^+)^2 \big\} dt\end{aligned}$$

On trouve un système d'équation différentielle où les inconnues sont : trois altitudes (une pour la carcasse, une pour chaque roue) et enfin l'inclinaison de la carcasse (θ).

On note :

$$R_1 = [u(x+l) - (y_1 + y + l\theta - R)]^+ ,$$
$$R_2 = [u(x-l) - (y_2 + y - l\theta - R)]^+ ,$$

On a :

$$(M + 2m)\ddot{y} + m\ddot{y}_1 + m\ddot{y}_2 = -2g(2m + M) + R_1 + R_2 , \tag{1}$$

$$m(\ddot{y}_1 + \ddot{y} + l\ddot{\theta}) = -ky_1 - gm + R_1 , \tag{2}$$

$$m(\ddot{y}_2 + \ddot{y} - l\ddot{\theta}) = -ky_2 - gm + R_2 , \tag{3}$$

$$m(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + 2l\ddot{\theta}) = R_1 - R_2 . \tag{4}$$

En faisant (4) plus (3) moins (2) on obtient $0 = k(y_1 - y_2)$ et donc $y_1 = y_2$.
En faisant (1) moins (2) moins (3) on obtient :

$$M\ddot{y} = -gM + 2ky_1 \; . \tag{5}$$

L'equation (4) donne alors :

$$2ml\ddot{\theta} = R_1 - R_2 \; . \tag{6}$$

Puis, (2) moins $\frac{m}{M}$(5) moins $\frac{1}{2}$(6) donne :

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1(1 + \frac{2m}{M}) + \frac{R_1 + R_2}{2} \; . \tag{7}$$

Finalement, on obtient, le système algébriquo-diférentiel suivant :

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -2g + \frac{2ky_1}{M} \; , \\
\ddot{y}_1 &= -ky_1(\frac{1}{m} + \frac{2}{M}) + \frac{R_1 + R_2}{2m} \; , \\
y_2 &= y_1 \; , \\
\ddot{\theta} &= \frac{R_1 + R_2}{2ml} \; .
\end{aligned}$$

3. Discrétisation des équations différentielles

Pour calculer les trajectoires des corps, nous pouvons approximer les équations differentielles par des équations récurrentes, où h désigne le pas de discrétisation en temps :

$$\begin{aligned}
y(t+h) &= 2y(t) - y(t-h) + h^2\left(-2g + \frac{2ky_1}{M}\right) \; , \\
y_1(t+h) &= 2y_1(t) - y_1(t-h) + h^2\left(-ky_1(\frac{1}{m} + \frac{2}{M}) + \frac{R_1 + R_2}{2m}\right) \; , \\
\theta(t+h) &= 2\theta(t) - \theta(t-h) + h^2\left(\frac{R_1 + R_2}{2ml}\right) \; .
\end{aligned}$$