ETUDE DU MOUVEMENT VERTICAL D'UN MONOCYCLE

QUADRAT QUENTIN

1. Présentation du modéle

Le véhicule est modélisé en 2D, par une carcasse de masse ponctuelle M_v accrochée à une roue (de rayon r et de masse M_r) par un ressort. On note $u(t)$ la l'altitude du sol par rapport à au repére, $y(t)$ est l'altitude de la carcasse, $z(t)$ l'alongement du ressort, et $y(t) + z(t)$, l'altitude de la roue. On note g la gravité (figure 1).

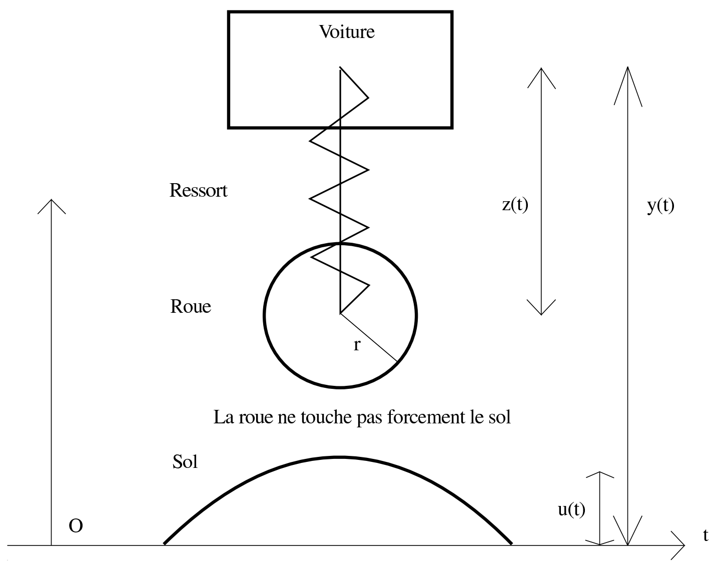

Fig. 1. Le monocycle

2. Calcul des équations du mouvement

Les forces qui sont en jeux sont : la pesanteur des masses (roue et carcasse), la répulsion du sol sur la roue et la force du ressort.

L'énergie cinétique de la roue (notée $\mathcal{E}_r^c$) est : $\mathcal{E}_r^c = 1/2 M_r(\dot{y} + \dot{z})^2$.

L'énergie cinétique de la voiture (notée $\mathcal{E}_v^c$) est : $\mathcal{E}_v^c = 1/2 M_v \dot{y}^2$.

L'énergie ressort (notée $\mathcal{E}_r$) est : $\mathcal{E}_r = 1/2kz^2;$.

L'énergie potentiel de la voiture (notée $\mathcal{E}_v^p$) est : $\mathcal{E}_v^p = M_v g y$.

L'énergie potentiel de la roue (notée $\mathcal{E}_r^p$) est : $\mathcal{E}_r^p = M_r g(y + z)$.

`Page web` : www.epita.fr/∼quadra_q.
`Email` : quadra_q@epita.fr.

L'énergie de reaction du sol (notée $\mathcal{E}_s$) est : $\mathcal{E}_s = 1/2((u-(y+z-r))^+)^2$, c'est à dire que $\mathcal{E}_s$ vaut $1/2(u-(y+z-r))^2$ quand $u-(y+z-r) > 0$, sinon il vaut 0.

$$\mathcal{A}(x()) = \int (\, 1/2M_r(\dot{y}+\dot{z})^2 + 1/2M_v\dot{y}^2 - 1/2kz^2 - M_vgy - M_rg(y+z) \\ - 1/2(u-(y+z-r))^+)^2 \,)dt$$

Comme dans le rapport expliquant le principe de la moindre action, on trouve un système d'équation différentielle où les inconnues sont l'altitude de la roue et de la carcasse :

$$(\ddot{z}+\ddot{y})M_r + \ddot{y}M_v + g(M_v+M_r) - (u-(y+z-r))^+ = 0 \, , \tag{1}$$

$$(\ddot{z}+\ddot{y})M_r + M_rg + kz - (u-(y+z-r))^+ = 0 \, . \tag{2}$$

En notant : $w = y+z$, (1)-(2) donne :

$$\ddot{y}M_v + gM_v - k(w-y) = 0.$$

(2) donne :

$$\ddot{w}M_r + gM_r + k(w-y) - (u-(w-r))^+ = 0$$

3. Discrétisation des équations différentielles

Pour calculer les trajectoires des deux corps, nous pouvons approximer les équations differéntielles (1) et (2) par les équations récurrentes, où h désigne le pas de discrétisation :

$$y(t+h) = 2y(t) - y(t-h) + gh^2 - \frac{k(w-y)h^2}{M_v} \, ,$$
$$w(t+h) = 2w(t) - w(t-h) + \frac{h^2}{M_r}(u(t) - w(t) + r)^+ - \frac{h^2k(w(t)-y(t))}{M_r} - h^2g \, .$$