PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION

QUADRAT QUENTIN

1. Définition

On appelle action $\mathcal{A}$ d'un système mécanique l'intégrale le long du mouvement de la différence de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathcal{A}(x()) = \int (\mathcal{E}_c(x(t)) - \mathcal{E}_p(x(t))dt ,$$

où $\mathcal{E}_c(x(t))$ designe l'énergie cinétique, $\mathcal{E}_p(x(t))$ l'énergie potentielle et $t \mapsto x(t)$ la trajectoire du système.

Le principe de la moindre action nous dit que la trajectoire du système est celle qui minimise l'action.

Pour trouver cette trajectoire on calcule la variation de l'action $\delta\mathcal{A}$ associée à la variation de la trajectoire δx et on détermine les conditions qui assurent que $\delta\mathcal{A}$ soit nul quelque soit δx.

2. Exemple d'application

Prenons le cas de deux masses, de poids respectifs m_1 et m_2, accrochées l'une à l'autre par un ressort de force $F = -kl$ ou l désigne l'allongement du ressort ($|x_1(t) - x_2(t)|$) avec $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions à l'instant t des deux masses.

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A} =&1/2 \int (m_1(\dot{x_1} + \delta\dot{x}_1)^2 + m_2(\dot{x}_2 + \delta\dot{x}_2)^2 - k(x_2 + \delta x_2 - x_1 - \delta x_1)^2)dt \\ &- 1/2 \int (m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 - k(x_2 - x_1)^2)dt ,\end{aligned}$$

$$\delta\mathcal{A} = \int m_1\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\delta\dot{x}_2 - k(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + o(\|x_1 - x_2\|) ,$$

Par intégration par partie on obtient :

$$\delta\mathcal{A} = \int -m_1\ddot{x_1}\delta x_1 - m_2\ddot{x_2}\delta x_2 - k(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + o(\|x_1 - x_2\|) ,$$

car on suppose que les variations des trajectoires sont nulles aux extrémites.

Finalement on trouve :

$$\delta\mathcal{A} = \int (-m_1\ddot{x_1} + k(x_2 - x_1))\delta x_1 + \int (-m_2\ddot{x_2} + k(x_1 - x_2))\delta x_2 + o(\|x_1 - x_2\|) .$$

L'action doit être minimale c.a.d.

$$\delta A = 0, \quad \forall \delta x_1,\ \forall \delta x_2,$$

`Page web` : www.epita.fr/~quadra_q.
`Email` : quadra_q@epita.fr.

donc :

$$-m_1\ddot{x}_1 + k(x_2 - x_1) = 0, \quad -m_2\ddot{x}_2 + k(x_1 - x_2) = 0 \; .$$

On obtient les mêmes équations que celles en appliquant la loi fondamentale de la dynamique $m\vec{\gamma} = \vec{F}$.